Mathe Klausur 1

Erwartungswert

Erwartungswert einer Zufallsvariable gibt an, welcher Wert durchschnittlich für die Zufallsvariable zu erwarten ist

Berechnung:

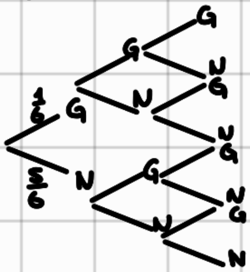
1. Man bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen
2. Man multizipliert jeden wert der Zufallsvariablen mit seiner Wahrscheinlichkeit und addiert die Produkte

Beispiel:

Würfel dreimal werfen 1€

Jede 6 1€

k	-1	0	1	2
$P(x=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$



Zufallsvariable x = Gewinn (auszahlung - Einsatz)

$x=-1$ Ereignis {NNN}

$x=0$ Ereignis {GNN; NGN; NNG}

$x=1$ Ereignis {GGN; GNG; NGG}

$x=2$ Ereignis {GGG}

$$E(x) = \frac{125}{216} \cdot (-1) + \frac{25}{72} \cdot 0 + \frac{5}{72} \cdot 1 + \frac{1}{216} \cdot 2$$

$$= -0{,}5$$

Standartabweichung

Gebräuchliche Streuungsmaße einer Häufikeitsverteilung sind die Varianz und die Standartabweichung.

Der Erwartungswert sagt nichts aus über die Streung der x_i-Werte der Zufallsvariablen X um den Erwartungswert.

Varianz = $Var(x) = \delta^2$, Standartabweichung = δ

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 \cdot h_i$$

$$\delta = \sqrt{\delta^2}$$

Beispiel

➲ Für die Produktion von Schrauben ist eine Kontrolle notwendig. Eine Maschine produziert Schrauben mit dem Soll-Durchmesser d = 8,5 mm.
Eine Stichprobe ergab folgende Tabelle:

Durchmesser x_i	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8
relative Häufigkeit h_i	0,02	0,08	0,15	0,60	0,10	0,03	0,02

Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.

$= (8{,}2-8{,}485)^2 \cdot 0{,}02 + (8{,}3-8{,}485)^2 \cdot 0{,}08 + (8{,}4-8{,}485)^2 \cdot 0{,}15 + (8{,}5-8{,}485)^2 \cdot 0{,}6 +$

$(8{,}6-8{,}485)^2 \cdot 0{,}1 + (8{,}7-8{,}485)^2 \cdot 0{,}03 + (8{,}8-8{,}485)^2 \cdot 0{,}02$

$= 0{,}01$

Standartabweichung: $= \sqrt{0{,}1}$

Die Standartabweichung einer Schraube beträgt 0,1 mm

Bernoulli Formel

Versuche ohne Zurücklegen

Bernoulli Formel:

$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} = B_{n,p}(k)$

n = Versuche, k = Trefferzahl,

p = Trefferwahrscheinlichkeit

In TR mit Menü → 4 → ⇓ → 1 → 2 kumul. Binom.-V

→ nur "höchstens" ≤ z.B. höchstens 2 = 1 ; 2

Beispiel

5 mal würfeln

Gewinn bei: "5 oder 6"

a) genau dreimal hohe Augenzahl

$n = 5,\ k = 3,\ p = \frac{1}{3}$

$P(x=3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243} \approx 0{,}165$

b) Mindestens dreimal hohe Augenzahl (3 oder mehr)

$$P(x \geq 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$= \frac{17}{81} = 0{,}21$$

oder $1 - P(x \leq 2) \rightarrow$ TR

c) höchstens zweimal hohe Augenzahl (2 oder weniger)

$$P(x \leq 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= \frac{64}{81} \approx 0{,}79$$

oder TR

Erwartungswert Binomialverteilung

Eine $B_{n;p}$-verteilte Zufallsvariable x hat den

Erwartungswert $E(x) = \mu = n \cdot p$

Die Standartabweichung $\delta = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Sigma Regel

$[\mu - \delta ; \mu + \delta]$

Sigma Intervall

Untergrenze aufrunden, Obergrenze abrunden

Obergrenze − (Untergrenze − 1)

Beispiel

a) $n = 200$, $p = 0{,}25$

$\mu = 200 \cdot 0{,}25$ $\qquad$ $\delta = \sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}$

$= 50$ $\qquad$ $= 6{,}12$

$[50 - 6{,}12 ; 50 + 6{,}12] = [43{,}88 ; 56{,}12]$

$P(43{,}88 \leq x \leq 56{,}12)$ $\qquad$ x ganzzahlig

$P(44 \leq x \leq 56) = P(x \leq 56) - P(x \leq 43) = 0{,}855 - 0{,}144 = 0{,}711$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Treffer zwischen 44 und 56 liegen, beträgt 71,1 %